Concursul Interjudețean de Matematică "Bogdan Stan"
Ediția a I-a
Colegiul National "Radu Greceanu", Slatina, OLT
28-29 ianuarie 2011

Barem clasa a X-a

Problema 1.
Daca a, b, c $\in (1,\infty)$ sau a, b, c$\in (0,1)$ iar $\log_a b$=x ,$\log_b c = y$,$\log_c a = z$,demonstrați că

$$\frac{x^7y^3}{2x+z}+\frac{y^7z^3}{2y+x}+\frac{z^7x^3}{2z+y}\geq 1$$

Prof. Gh.Duta, CN "Radu Greceanu", Slatina

Barem

Observam ca x , y, z sunt strict positive si xyz$=1$ ………………………………………………1p
Tinand cont de relatia xyz=1 ,inegalitatea se mai scrie:

$$\frac{x^6y^2}{2xz+z^2}+\frac{y^6z^2}{2yx+x^2}+\frac{z^6x^2}{2zy+y^2}$$

≥ 1 …………………………………………………………………1p
Conform inegalitatii Cauchy –Schwartz avem :

$$\frac{x^6y^2}{2xz+z^2}+\frac{y^6z^2}{2yx+x^2}+\frac{z^6x^2}{2zy+y^2}\geq\frac{(x^3y+y^3z+z^3x)^2}{(x+y+z)^2}.$$

……………………………………………………3p

Demonstram acum ca $\frac{(x^3y+y^3z+z^3x)^2}{(x+y+z)^2}\geq 1$ <=>

$x^3y+y^3z+z^3x \geq x + y + z$. Dar $x^3y+y^3z+z^3x=\frac{x^2}{z}+\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{y}\geq\frac{(x+y+z)^2}{x+y+z}$ = x+ y +z .Am tinut cont de relatia xyz=1 si inegalitatea Cauchy –Schwartz. …………………………………………2p

Problema 2
Se dau 9 numere complexe, diferite doua cate doua,de modul unitar:$z_1,\dots,z_9$. Aratati ca $\exists k,l \in\{1,\dots 9\}$ cu $k\neq l$ astfel incat $|z_k+z_l|>\sqrt{2}$.

Prof. Ion Tecu, CN "Radu Greceanu", Slatina

Barem

Concursul Interjudețean de Matematică "Bogdan Stan"
Ediția a I-a
Colegiul National "Radu Greceanu", Slatina, OLT
28-29 ianuarie 2011

Barem clasa a X-a

Imaginile in planul complex ale celor 9 numere complexe sunt 9 puncte situate pe cercul trigonometric C(O,1) . ……………………………………………………………………………………..1p

Atunci cel putin doua dintre aceste puncte sunt situate pe acelasi arc deschis al unuia dintre cele patru cadrane. ………………………………………………………………………………………1p

Luand cele doua puncte A_k si A_l avem ca vectorii $\overrightarrow{OA_k}$ si $\overrightarrow{OA_l}$ formeaza un unghi mai mic de $\frac{\pi}{2}$ si daca $\overrightarrow{OM}$ este vectorul suma,atunci in rombul OA_kMA_l avem caOM este diagonala mare. …………..3p

Evident OM$> \sqrt{2}$,rezulta $\left|\overrightarrow{OA_k}+\overrightarrow{OA_l}\right| > \sqrt{2}.$ …………………………………………………1p

De aici $|z_k + z_l| > \sqrt{2}.$ ……………………………………………………………………………1p

Problema 3

Să se rezolve ecuația :

$$4^{x^2-x}=\log_2 x+\sqrt{x-1}+14$$

Prof. Marin Tolosi, CN "Radu Greceanu", Slatina

Prelucrare după G.M.nr. 7-8-9 ,2010

Barem

Conditii: $\begin{cases} x>0 \\ x-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[1,\infty)$ ……………………………………………………1p
Consideram f: $[1,\infty)\to R$, f(x)= $4^{x^2-x}-\log_2 x-\sqrt{x-1}-14$ ecuatia se scrie f(x)=0;
Se demonstreaza ca f este functie strict convexa ca suma a trei functii strict convexa…………3p
Se observa ca f(1)=-13<0 si f(2)=0……………………………………………………………..1p
Finalizare: utilizand propietatile lui f se arata ca x=2 este solutie unica…………………………2p

Problema 4.
Fi e n$\in N^*$ şi numerele reale a_k, b_k ,k=$\overline{1,n}$ astfel încât $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sunt strict positive si distinct doua câte două.

Concursul Interjudețean de Matematică "Bogdan Stan"
Ediția a I-a
Colegiul National "Radu Greceanu", Slatina, OLT
28-29 ianuarie 2011

Barem clasa a X-a

a) Să se arate că dacă $a_1\cos b_1x + a_2\cos b_2x + \cdots + a_n\cos b_nx \geq 0 \quad \forall x \in R$ atunci $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

b) Să se arate că dacă $a_k \in R^*$, k=$\overline{1,n}$ si funcția f:R→R unde

f(x) =$a_1\cos b_1x + a_2\cos b_2x + \cdots + a_n\cos b_nx$ este periodică atunci $\frac{b_i}{b_j} \in Q$

Prof. Marin Tolosi, CN "Radu Greceanu", Slatina

Barem

a) Inducție după n.

P(1) : $a_1\cos b_1x \geq 0,\ \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow a_1=0$ (luăm x = 0)..1p

P(k) $\Rightarrow$ P(k+1). Pres. P(k) adevărată. Presupunem

$a_1\cos b_1x + a_2\cos b_2x + \ldots + a_{k+1}\cos b_{k+1}x \geq 0.\ \forall x \in \mathbf{R}.$ (1)

Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $b_i \leq b_{i+1}$, $\forall$i, de unde

$\frac{b_i}{b_{i+1}} \in (0,1),\ \forall i.$ (2) 1p

În (1), înlocuim x cu $\frac{x}{b_{i+1}}$ şi obținem

$a_1\cos\frac{b_1}{b_{k+1}}x + a_2\cos\frac{b_2}{b_{k+1}}x + \ldots + a_k\cos\frac{b_k}{b_{k+1}}x + a_{k+1}\cos x \geq 0,\ \forall x \in \mathbf{R}$ (3)

În (3) înlocuim x cu x+π şi obținem 1p

$a_1\cos\frac{b_1}{b_{k+1}}(x+\pi) + a_2\cos\frac{b_2}{b_{k+1}}(x+\pi) + \ldots + a_k\cos\frac{b_k}{b_{k+1}}(x+\pi) - a_{k+1}\cos x \geq 0,\ \forall x \in \mathbf{R}$(4)

Însumând relațiile (3) şi (4) şi transformând sumele de cosinusuri în produse, obținem

$a_1\cos\frac{b_1}{b_{k+1}}\cdot\frac{\pi}{2}\ \cos\frac{b_1}{b_{k+1}}(x+\frac{\pi}{2}) + \ldots + a_k\cos\frac{b_k}{b_{k+1}}\cdot\frac{\pi}{2}\ \cos\frac{b_k}{b_{k+1}}(x+\frac{\pi}{2}) \geq 0,\ \forall x \in \mathbf{R}$.....1p

Înlocuim x cu $\frac{x+\frac{\pi}{2}}{b_{k+1}}$ în ultima relație, obținem

$a_1\cos b_1x\cos\frac{b_1}{b_{k+1}}\cdot\frac{\pi}{2} + a_2\cos b_2x\cos\frac{b_2}{b_{k+1}}\cdot\frac{\pi}{2} + \ldots + a_k\cos\frac{b_k}{b_{k+1}}\cdot\frac{\pi}{2}\cos b_kx \geq 0.\ \forall x\in\mathbf{R}.$

Ținînd cont de faptul că P(k) e adevărată, obținem $a_i\cos\frac{b_i}{b_{k+1}}\cdot\frac{\pi}{2}=0,\ \forall i=\overline{1,k}$ (5)

Din (2), $\frac{b_i}{b_{k+1}}\cdot\frac{\pi}{2} \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, deci $\cos\frac{b_i}{b_{k+1}}\cdot\frac{\pi}{2}\neq 0$, deci $a_i=0,\ \forall i=\overline{1,k}$ 1p

Barem clasa a X-a

Atunci $a_{k+1}\cos b_{k+1}x \geq 0$. $\forall x \in \mathbf{R}$, de unde $a_{k+1} = 0$.

Deci $a_i = 0$, $\forall i = \overline{1,k+1}$, deci P(k+1) e adevărată.

b) Funcția f are perioada T, deci f(x+T) = f(x), $\forall x \in \mathbf{R}$, de unde

$\sum_{i=1}^{n} a_i (\cos b_i (x+T) - \cos b_i x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, ...1p

adică $\sum_{i=1}^{n} a_i \sin\frac{b_i T}{2} \sin b_i y = 0$, $\forall y \in \mathbf{R}$. (se înlocuieşte x+$\frac{\pi}{2}$ cu y)

Conform a), ultima egalitate implică $\sin\frac{b_i T}{2} = 0$, de unde $b_i = \frac{2k_i\pi}{T}$ şi $k_i \in \mathbf{Z}$, deci

$\frac{b_i}{b_j} = \frac{k_i}{k_j} \in \mathbf{Q}$, $\forall i,j = \overline{1,n}$ 1p