Colegiul Naţional "Radu Greceanu"

Concursul Judeţean de Informatică şi Matematică **INFO-OLT**, Ediţia a VI-a,

10 mai 2017

Barem clasele VI-VIII

1. Arătați că nu există două numere naturale nenule a căror sumă să fie 2018, iar produsul lor să fie divizibil cu 2018.

   Soluție:

   Presupun că există două numere naturale cu acea proprietate. Fie acestea a și b. Avem 2018=2*1009, cu 2 și 1009 numere prime. Atunci, unul dintre numere (considerăm că este a) se va divide prin 2, dar atunci și b (2018-a) se va divide prin 2.

   Analog se demonstrează că și a și b se divid prin 1009, deci fiecare dintre ele este mai mare sau egal decât 2018. Dar atunci suma lor va fi minim 4036 < 2018, contradicție.

2. Care dintre următoarele numere este mai mare:

   a) $\sqrt{2016}+\sqrt{2018}$ și $2*\sqrt{2017}$;

   b) $63!$ și 32^{63}?

   Soluție:

   a) Demonstrăm că $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}<2*\sqrt{x}$:

   $$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}<2*\sqrt{x} \leftrightarrow x-1+x+1+2*\sqrt{(x-1)*(x+1)}<4*x$$

   $$\leftrightarrow 2*x+2*\sqrt{(x-1)*(x+1)}<4*x \leftrightarrow \sqrt{(x-1)*(x+1)}<x \leftrightarrow$$

   $$\leftrightarrow (x-1)*(x+1)<x^2 \text{ (adevărat)}$$

   b) $63! = 1*2*\ldots*63 = (1*63)*(2*62)*\ldots*(31*33)*32$

   Fiecare paranteză conține un produs $(32-x)*(32+x)=32^2-x^2<32^2$.

   Avem 31 paranteze, deci $63!<32^{2*31}*32=32^{62+1}=32^{63}$.

3. Intr-un triunghi ABC cu AB < AC, aratati ca:

a) (< ABC) > (< ACB)

b) si reciproca este valabila

Solutie :

a)

Alegem D pe BC astfel incat AB = AD

(<ABC) > (<ABD)

(<ABD) = (<ADB)

(<ADB) exterior triunghiului BDC

astfel avem ca

(<ADB) > (<C) => Stim ca (<ABD) = (<ADB) => [(<ABD) + (<DCB)] > (<ACB)

Deci **(<ABC) > (<ACB)**

b)

Presupunem ca AB>AC. Conform relatiei de la punctul a) rezulta ca (<ABC) < (<ACB) relatie care contrazice ipoteza => presupunerea este falsa.

4 Pe o masă sunt 50 de cărți de joc, 10 cu fața în sus și 40 cu spatele în sus.

Cum se pot împărți cărțile în două grămezi, astfel încât fiecare grămadă să aibă același număr de cărți cu fața în sus, considerând că sunteți legat la ochi, nu aveți nicio metodă de distingere între fața și spatele unei cărți și puteți să le întoarceți?

Soluție:

Se impart cărțile arbitrar într-o grămadă de 40 de cărți și una de 10. Fie N numărul de cărți cu fața în sus din prima grămadă. Atunci în prima vor fi N cărți cu fața în sus, iar în a doua (cea cu 10 cărți) 10-N. Dacă se întorc toate cărțile din a doua grămadă, vom avea N cărți cu fața în sus în ambele grămezi.

5 Câte dreptunghiuri se pot forma în interiorul unei grile de pătrate cu dimensiunile 4x6?

Soluție:

O grilă MxN este formată din M+1 linii orizontale și N+1 linii verticale. Orice dreptunghi se formează din 2 linii orizontale și 2 verticale. Numărul de dreptunghiuri este egal cu produsul dintre numărul de moduri în care putem alege cele 2 linii orizontale și numărul de moduri în care putem alege 2 linii vertical.

Pentru 4x6 vom avea 10 moduri pentru liniile orizontale și 21 pentru cele verticale, în total

210.