Grupa medie (clasele V-VI) Matematică

Problema 1 (9 puncte)

Lăsând robinetul deschis, cada din baie se umple în 5 minute. Lăsând deschis ventilul din fundul căzii, ea se golește în 7 minute. Apa vine de la robinet în mod uniform și curge din cadă tot uniform.

În cât timp see umple cada dacă ar fi deschise și robinetul și ventilul?

Soluție:

Notăm cu x litri capacitatea cadei.

Viteza cu care se umple cada (robinet deschis, ventil închis) este $\frac{x}{5}$ litri/minut. 2p

Viteza cu care se goleste cada(robinet închis, ventil deschis) este $\frac{x}{7}$ litri/minut. 2p

Când și robinetul și ventilul sunt deschise, într-un minut intră in cada $\frac{x}{5}$ litri și ies din cadă $\frac{x}{7}$ litri, deci în acest caz cada se umple cu $\frac{x}{5} - \frac{x}{7} = \frac{2x}{35}$ litri/minut. 4p

În concluzie, cada se umple în $x : \frac{2x}{35} = \frac{35}{2}$ minute, adică 17 minute și 30 de secunde. 1p

Problema 2 (9 puncte)

Distanța de la Târgoviște la București este de 80 km. În același moment, din Târgoviște pleacă spre București un tren cu viteza de 40 km/h și un porumbel cu viteza de 60 km/h. Porumbelul ajunge în București înaintea trenului, se întoarce spre Târgoviște, când întâlnește trenul se îndreaptă din nou spre București și continuă această mișcare între tren și București până când trenul ajunge în București. Care este distanța totală pe care o parcurge porumbelul?

Soluție:

La prima vedere, problema pare dificilă, deoarece ne gândim să determinăm locurile de întâlnire ale porumbelului cu trenul.

De fapt, problema are o rezolvare mult mai simplă. Să observăm că mișcarea porumbelului are loc atâta timp cât trenul merge de la Târgoviște la București. 4p

Cum trenul are viteza de 40 km/h, el parcurge distanța de 80 km în 2 ore. 2p

Rezultă că porumbelul va zbura și el tot 2 ore, cu viteza de 60 km/h, deci va parcurge 2*60=120 km. 3p

Observație: Se punctează orice idee corectă de rezolvare.

Problema 3 (9 puncte)

Arătați că orice număr natural nenul are un multiplu nenul format numai cu cifre de 1 și 0.

Solutie:

Sa consideram numerele 1, 11, 111, 1111, . . . , 111...1(de n ori 1). La impartirea cu n avem n resturi. Daca unul dintre numerele de mai sus este divizibil cu n atunci concluzia este evidenta. … 4pct.
Daca nu, atunci printre numerele de mai sus nu vor fi decat n-1 resturi. Din principiul lui Dirichlet obtinem ca doua numere din sirul de mai sus dau acelasi rest la impartire cu n. Fie acestea A=111...1 (de i ori 1) si B=111...1 (de j ori 1), j>i. Numarul B-A este divizibil cu n, B-A=111..1000...0.(1 de j-i ori si 0 de i ori). 5 pct.

Problema 4 (9 puncte)

Sa se scrie 745^{745} ca suma de doua patrate perfecte

Solutie:

$$745^{745}=745^{744}*745=745^{744}*(16+729)=(745^{372}*4)^2+(745^{372}*27)^2.$$

Problema 5 (9 puncte)

Să se determine n întreg astfel încât 3n+1 și 12n-11 să fie simultan pătrate perfecte.

Solutie:
3n+1=k^2 si 12n-11=q^2 => 12n+4=4k^2 si 12n-11=q^2. Prin diferenta vom obtine (2k-q)(2k+q)=15 k,q intregi. Vom obtine S={1,5}.